Numeri immaginari e filtri attivi

INDICE

1. INTRODUZIONE

Questo documento non ha certamente la pretesa di essere sostitutivo di testi ben più autorevoli, ai quali anzi si raccomanda sempre la consultazione.
Lo scopo di questo documento è piuttosto quello di fornire le informazioni "pratiche", relative ai numeri immaginari e complessi, per quanto riguarda la valutazione dei circuiti, in particolare i filtri attivi, e il loro eventuale utilizzo.

2. RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

La rappresentazione di una funzione in forma grafica, è una parte costante della nostra vita, basti pensare allo schermo di un oscilloscopio, o la rappresentazione dei dati di borsa e così via.

Di norma una funzione viene rappresentata nella seguente forma:

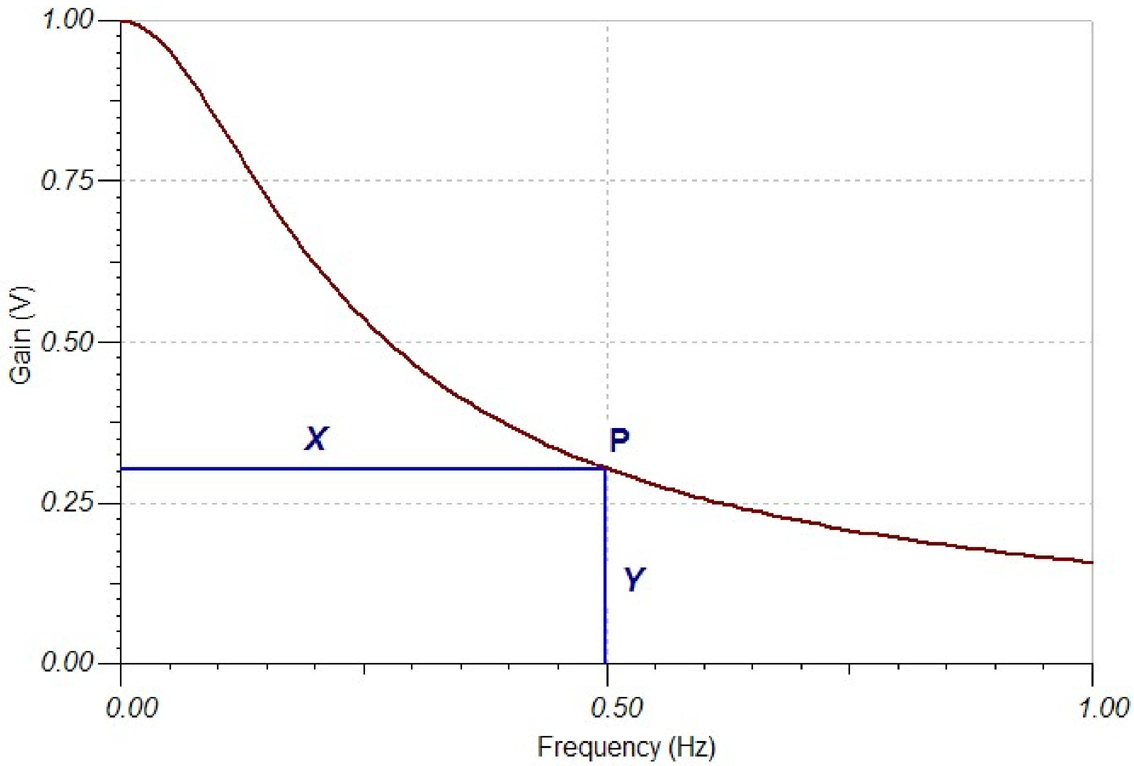


Figura 1

Quindi, nel caso esposto il punto P vale X(0,5);Y(0,3) per meglio dire Y=0,3V a 0,5Hz.

Alle stesse conclusioni è possibile arrivare procedendo in forma trigonometrica:

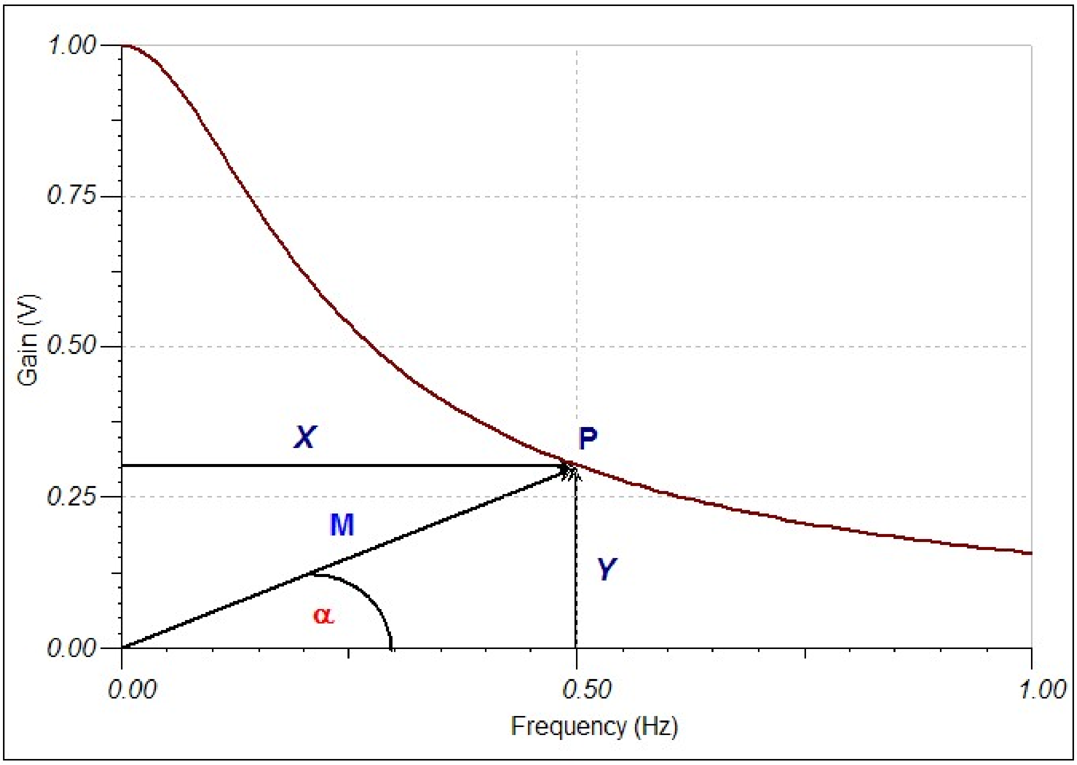


Figura 2

Dove:

$$M = \sqrt{Y^2 + X^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{Y}{M}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{M}$$

E infine l' angolo:

$$\alpha = atan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Alla luce di quanto esposto è evidente notare la correlazione tra l' asse Y e sinα, e tra l' asse X e cosα. Per cui, anche se da un punto di vista puramente matematico non sarebbe corretto, si può dire che l' asse Y rappresenta il seno mentre l' asse X il coseno.

Certamente la trigonometria non si ferma a queste quattro formule, ma queste sono sufficienti per gli scopi che si prefigge questo documento.

3. IL NUMERO IMMAGINARIO

La teoria e gli studi sui numeri immaginari, hanno una storia lunghissima. L' applicazione spazia, ovviamente in tutti i campi della fisica, ma anche ad esempio nella cartografia.

Il numero immaginario nasce da un "paradosso" ossia qual è il valore di:

$$\sqrt{-1}$$

Ovviamente non è possibile trovare la radice quadrata di un numero negativo, per cui si assume che:

$$j = \sqrt{-1}$$

I matematici, forse usano di più il termine "i" al posto di "j", ad ogni modo "j" è il modo corrente di interpretare il numero immaginario in elettronica.
Il numero immaginario da solo ha poco significato, in genere lo si trova seguito (o preceduto) da un valore o da una variabile, ad esempio:

$$j4 \quad , \quad -j8 \quad , \quad jx \quad , \quad j\omega$$

I termini che non sono preceduti dal numero immaginario sono definiti come numeri reali.

3.1. Numeri complessi

La combinazione di un numero immaginario con un numero reale, viene chiamata numero complesso, e si rappresenta come:

$$jy + x \quad oppure \quad j7 - 12$$

In realtà è lecito pensare che anche numeri singoli siano complessi, ad esempio:

$$j8 = J8 + 0 = J8$$

Ma anche:

$$-7 = J0 - 7 = \left(\sqrt{-1} \cdot 0\right) - 7 = 0 - 7 = -7$$

3.2. Il piano complesso

La rappresentazione grafica dei numeri immaginari, complessi, e dei numeri reali, avviene sul “piano complesso”, o piano di Gauss, o di Argand-Gauss.
Come si vede dalla figura 3 non è molto diverso dal solito:

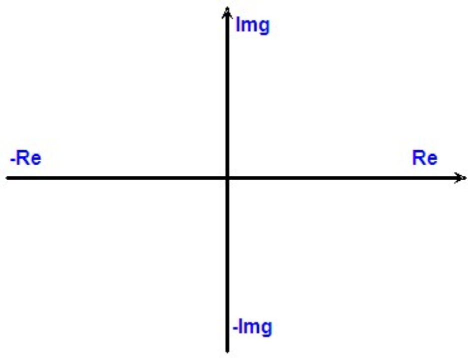


Figura 3

L’ asse delle ascisse è quello della componente reale mentre sule ordinate è disposta la parte immaginaria.
La valutazione avviene in forma trigonometrica, ricavando i valori del modulo e dell’ angolo.
Ad esempio:

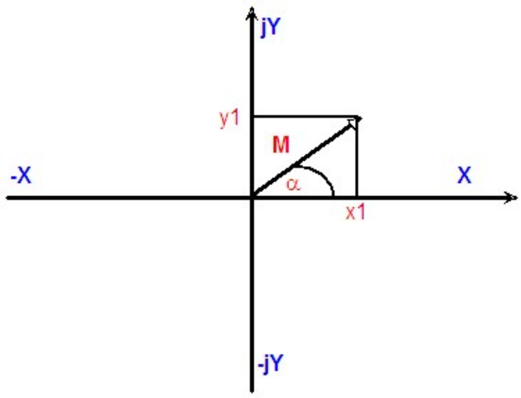


Figura 4

Ad esempio nel caso illustrato:

$$M = \sqrt{Y1^2 + X1^2}$$

$$\alpha = atan\left(\frac{Y1}{X1}\right)$$

3.3. Potenze dei numeri immaginari

Per comprendere come utilizzare i numeri immaginari, occorre valutarne la potenza.

Se poniamo:

$$j^0 = \left(\sqrt{-1}\right)^0$$

Come si sa qualunque numero elevato a 0=1, quindi:

$$j^0 = 1 \qquad (1)$$

- Quindi un numero reale positivo.

Se fosse accompagnato da un valore:

$$j^0 12 = 1 \cdot 12 = 12$$

Avremo un valore reale e positivo.

Aumentiamo la potenza:

$$j^1 = \left(\sqrt{-1}\right)^1$$

Qualsiasi numero elevato a uno, restituisce il valore del numero:

$$j^1 = j \qquad (2)$$

- Un numero sull' asse immaginario positivo.

Aumentando ancora la potenza:

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$$

Ovviamente elevare al quadrato una radice vuole dire eliminare la radice, quindi:

$$j^2 = -1$$

- Un numero reale ma negativo.

Aumentando ancora la potenza:

$$j^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot \sqrt{-1} = -j$$

- Un numero sull' asse immaginario negativo.

Se aumentiamo ulteriormente la potenza il ciclo si ripete:

$$j^4 = j^0$$
$$j^5 = j^1$$
$$j^6 = j^2$$
$$j^7 = j^3$$

Aumentando ancora, la sequenza rimane invariata.
La rappresentazione della sequenza delle potenze nella figura di seguito:

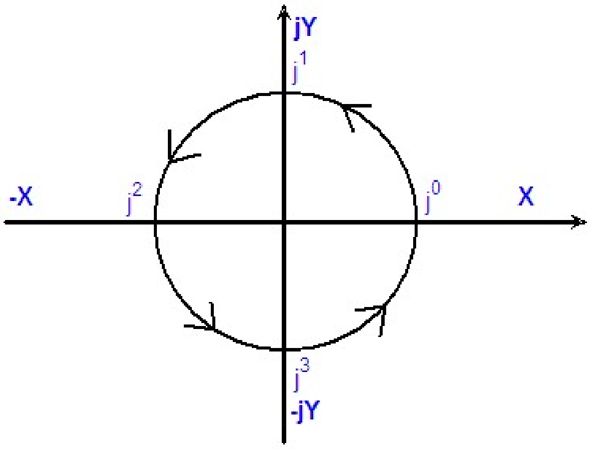


Figura 5

Proviamo a fare qualche esempio:

1) $j^0 3 + 7 = 3 + 7 = 10$
   Un numero reale positivo.

2) $j^1 4 + 12 = j4 + 12$
   Un numero complesso con parte immaginaria positiva e reale positiva:

   $M = \sqrt{4^2 + 12^2} = 12{,}65$
   $\alpha = atan\left(\frac{4}{12}\right) = 18{,}43°$

3) $(j2)^2 + 15 = (-1 \cdot 4) + 15 = -4 + 15 = 11$
   Un numero reale positivo.

4) $(j3)^3 + 15 = \left(\sqrt{-1}^2 \cdot \sqrt{-1}^1 \cdot 27\right) + 15 = (-1 \cdot j \cdot 27) + 15 = -j27 + 15$
   Un numero complesso con parte immaginaria negativa e reale positiva:

   $M = \sqrt{27^2 + 15^2} = 30{,}88$
   $\alpha = atan\left(\frac{-27}{15}\right) = -60{,}9°$

3.4. Considerazione sulla rappresentazione della fase

La valutazione della fase è una delle cose più importanti nel dimensionamento di molti circuiti, filtri ma anche servocontrolli, oscillatori.

La fase è ovviamente quella ricavata dall' arcotangente del rapporto tra parte immaginaria e parte reale, come si vede negli esempi precedenti.
Il calcolo effettuato però rappresenta in realtà l' angolo tra i due vettori (immaginario e reale).

Per dare continuità alla variazione della fase bisogna usare un piccolo accorgimento:

$$se\ \frac{Img}{Re}\ allora\ \varphi = atan\left(\frac{Img}{Re}\right)$$

$$se\ \frac{Img}{-Re}\ allora\ \ \varphi = 180 + atan\left(\frac{Img}{-Re}\right)$$

$$se\ \frac{-Img}{-Re}\ allora\ \ \varphi = 180 + atan\left(\frac{-Img}{-Re}\right)$$

$$se\ \frac{-Img}{Re}\ allora\ \ \varphi = 360 + \ atan\left(\frac{-Img}{Re}\right)$$

Visto sul piano complesso:

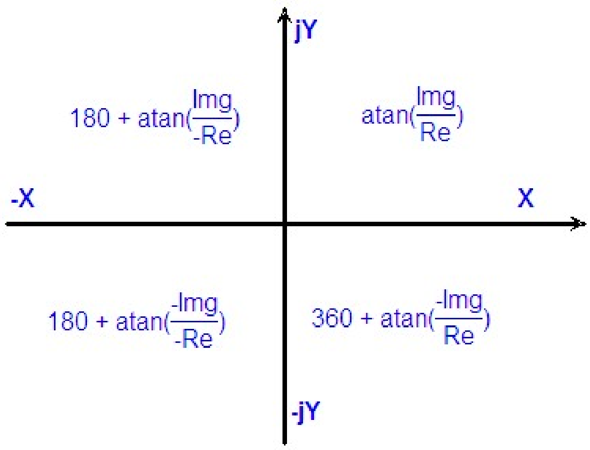


Figura 6

3.5. Applicazione nelle funzioni di trasferimento

Quando si risolve una funzione di trasferimento, nel caso esistano variabili complesse, si arriva ad una soluzione del tipo:

$$V(x) = \frac{jnx + a}{jmx + c}$$

Per trovare il valore di V, occorre fare il rapporto tra i due moduli, cioè:

$$V = \frac{\sqrt{(nx)^2 + a^2}}{\sqrt{(mx)^2 + b^2}}$$

Analogamente per ricavare la fase, occorre trovare la fase del numeratore e sottrarre la fase ottenuta al denominatore:

$$\varphi_n = atan\frac{nx}{a}$$

$$\varphi_d = atan\frac{mx}{b}$$

$$\varphi = \varphi_n - \varphi_d$$

Naturalmente valgono le regole del calcolo della fase riportate in precedenza.
Qualora si fosse in presenza di più gruppi di numeri complessi, al numeratore, al denominatore o entrambi, occorre per trovare il valore di V, fare la somma dei singoli moduli del numeratore, e dividerla con la somma dei singoli numeri del denominatore.
Per il calcolo della fase si procede in maniera analoga, la somma algebrica delle fasi al numeratore alla quale si sottrae la somma algebrica delle fasi al denominatore.

3.6. Applicazione del piano complesso

E’ stato detto in precedenza che l’ asse delle ascisse è assimilabile al cosα, mentre le ordinate al sinα.

Invece del seno e coseno di un angolo, si possono sostituire con le funzioni cosω e sinω, dove :

$$\omega = 2\pi f$$

Cioè la pulsazione espressa in rad/s, in poche parole assimilabile alla frequenza.

Mettendo sull’ asse delle ascisse (parte reale) la funzione cosω, e sulle ordinate (parte immaginaria) la funzione sinω, si viene ovviamente a mantenere il rapporto di fase che esiste tra seno e coseno.

Il modulo che si viene così a calcolare sarà sempre una pulsazione (frequenza), ed avrà uno sfasamento rispetto all’ asse del cosω.
In pratica sull’ asse cosω (asse della parte reale o ω), viene rappresentato quella parte del circuito che non ha componenti reattive (condensatori o induttanze), che comporterebbero uno sfasamento di ±90° e che sono invece rappresentate sull’ asse sinω (o asse immaginario o jω).

4. ESEMPI PRATICI

Per fare un po' di chiarezza rispetto a quanto detto finora, conviene ricorrere a qualche esempio.

4.1. Filtro passa basso del secondo ordine

Per fare un esempio pratico, proviamo ad analizzare il comportamento di un filtro Passa-Basso del secondo ordine.
Per meglio rendere l' idea riporto i passaggi completi.

La formula generale è:

$$A_v\,(s) = \frac{\Omega_n{}^2}{s^2 + s2\xi\Omega_n + \Omega_n{}^2}$$

Dove:

- Ωn rappresenta la frequenza di risonanza del sistema espressa in rad/s (2πfn).
- ξ è il coefficiente di smorzamento del sistema.
- s è la variabile complessa j2πf o jω, in pratica la frequenza alla quale vogliamo analizzare il sistema.

Supponiamo che la frequenza entrante sia uguale a quella di risonanza, cioè:

$$s = j\Omega_\mathrm{n}$$

Nel caso del primo termine al denominatore:

$$s^2 = j^2\Omega_n{}^2$$

Come si è visto:

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

Moltiplicando -1 per Ωn^2 la formula diventa:

$$A_v\,(s) = \frac{\Omega_n{}^2}{-\Omega_\mathrm{n}{}^2 + j\Omega_n 2\xi\Omega_n + \Omega_n{}^2}$$

I termini con lo stesso colore sono di segno opposto e si annullano:

$$A_v\,(s) = \frac{{\Omega_n}^2}{j\Omega_n 2\xi\Omega_n}$$

I termini con lo stesso colore danno origine ad un quadrato:

$$A_v\,(s) = \frac{{\Omega_n}^2}{j2\xi{\Omega_n}^2}$$

Anche in questo caso i termini dello stesso colore si annullano e il risultato finale è:

$$A_v\,(s) = \frac{1}{j2\xi}$$

Prima considerazione: al numeratore abbiamo solo un valore reale, mentre al denominatore solo la parte immaginaria.

Ora per risolverlo assegniamo a ξ un valore ad esempio il coefficiente dei filtri Butterworth, cioè 0,707, quindi:

$$A_v\,(s) = \frac{1}{j1{,}414}$$

A questo punto occorre trovare i moduli sia al numeratore che al denominatore, in questo caso è molto semplice.

Al numeratore:

$$\sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

Analogamente al denominatore:

$$\sqrt{1{,}414^2 + 0^2} = \sqrt{1{,}414^2} = 1{,}41$$

Per ottenere il guadagno del sistema alla frequenza di risonanza basta fare il rapporto tra i due moduli:

$$A_V = \frac{1}{1{,}414} = 0{,}707 = -3dB$$

Appare subito evidente l' importanza del termine ξ al denominatore, dal suo valore dipende il guadagno del sistema alla frequenza di risonanza. Se ad esempio invece che 0,707 avessimo usato 0,2 la risposta sarebbe stata di un guadagno di 2,5 corrispondente a 7,96dB in pratica un' amplificazione alla frequenza di risonanza.
Se il valore di ξ=0, il guadagno diventa infinito e il nostro filtro diventa un oscillatore alla frequenza di risonanza.

Portare ξ a valori negativi è da evitare nel modo più completo, in quanto il sistema diventa instabile e tende ad innescare.

Per completare il lavoro occorre ancora trovare la fase in uscita al nostro sistema, calcolando quella al numeratore, poi quella al denominatore, e facendo poi la differenza tra le due.

Al numeratore:

$$\varphi_{num} = atan\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

Al denominatore:

$$\varphi_{den} = atan\left(\frac{1{,}414}{0}\right) = 90$$

Quindi la fase finale:

$$\varphi = \varphi_{num} - \varphi_{den} = 0 - 90 = -90°$$

Il risultato finale si può esprimere:

$$A_v = 0{,}707 \angle -90°$$

4.1.1. Verifica con ω < Ω_n

Per verificare la correttezza di quanto affermato, si può provare ad analizzare il comportamento dal sistema sia prima che dopo la frequenza di risonanza.
Occorre stabilire quale deve essere la frequenza di risonanza, per comodità f_n=1kHz quindi:

$$\Omega_n = 2\pi f_n = 6{,}28 \cdot 1kHz = 6280\, rad/s$$

Supponiamo di volere analizzare il comportamento del sistema per una frequenza di 300Hz:

$$s = j\omega = j2\pi f = j6{,}28 \cdot 300 = j1884\, rad/s$$

Riprendiamo l' equazione iniziale con i nuovi valori:

$$A_v = \frac{6280^2}{j^2 1884^2 + j1884 \cdot 2 \cdot 0{,}707 \cdot 6280 + 6280^2}$$

Quindi:

$$A_v = \frac{39438400}{-3549456 + j16729769{,}28 + 39438400}$$

$$A_v = \frac{39438400}{j16729769{,}28 + 35888944}$$

Di nuovo al numeratore abbiamo solo la parte reale, mentre al denominatore abbiamo un numero complesso, quindi per il numeratore:

$$\sqrt{0^2 + 39438400^2} = 39438400$$

Mentre per il denominatore:

$$\sqrt{16729769{,}28^2 + 35888944^2} = 39596735{,}74$$

E allora:

$$A_v = \frac{39438400}{39596735{,}74} = 0{,}996 = -0{,}035dB$$

A questo punto la fase al numeratore:

$$\varphi_{num} = atan\left(\frac{0}{39438400}\right) = 0$$

La fase al denominatore:

$$\varphi_{den} = atan\left(\frac{16729769{,}28}{35888944}\right) = 25$$

E la fase finale:

$$\varphi = \varphi_{num} - \varphi_{den} = 0 - 25 = -25°$$

Quindi il risultato finale:

$$A_v = 0{,}996 \angle -25°$$

4.1.2. Verifica con ω > Ω_n

Ripetiamo la prova per una frequenza che superi la frequenza di risonanza ad esempio f=3kHz.

$$s = j\omega = j2\pi f = j6{,}28 \cdot 3000 = j18840\, rad/s$$

Riprendiamo l' equazione iniziale con i nuovi valori:

$$A_v = \frac{6280^2}{j^2 18840^2 + j18840 \cdot 2 \cdot 0{,}707 \cdot 6280 + 6280^2}$$

Quindi:

$$A_v = \frac{39438400}{-354945600 + j167297692{,}8 + 39438400}$$

$$A_v = \frac{39438400}{j167297692{,}8 - 315507200}$$

Il modulo al numeratore:

$$\sqrt{0^2 + 39438400^2} = 39438400$$

Il modulo al denominatore:

$$\sqrt{167297692{,}8^2 - 315507200^2} = 357118063{,}5$$

E allora:

$$A_v = \frac{39438400}{357118063{,}5} = 0{,}11 = -19dB$$

A questo punto la fase al numeratore:

$$\varphi_{num} = atan\left(\frac{0}{39438400}\right) = 0$$

La fase al denominatore (essendo la parte reale di valore negativo, occorre aggiungere 180):

$$\varphi_{den} = 180 + atan\left(\frac{167297692{,}8}{-315507200}\right) = 152$$

E la fase finale:

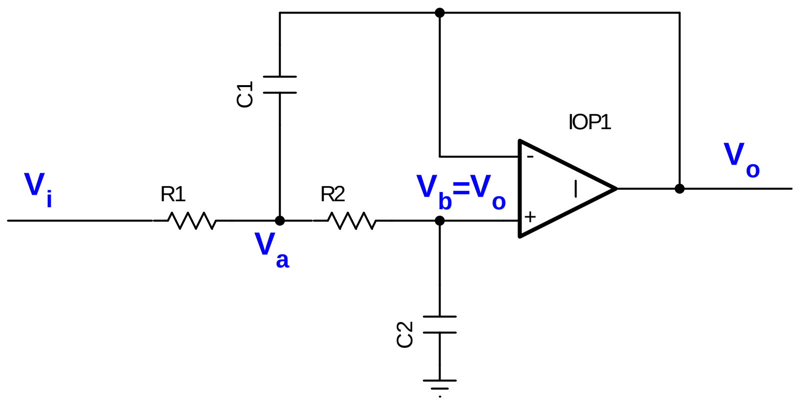
$$\varphi = \varphi_{num} - \varphi_{den} = 0 - 152 = -152°$$

Quindi il risultato finale:

$$A_v = 0{,}11 \angle -152°$$

5. PASSARE DALLO SCHEMA ALLA FORMULA FINALE

Naturalmente tutte le considerazioni fatte fino ad ora, sono riferite alla formula generale del filtro passa-basso del secondo ordine.
Come arrivare dallo schema alla formula finale è piuttosto semplice, per fare un esempio utilizziamo una classica cella Sallen-Key a guadagno unitario.



Occorre prima di tutto trovare la funzione di trasferimento, ossia Vo/Vi. Per farlo bisogna scrivere una equazione per ogni nodo del circuito, sapendo che in ogni nodo la somma di tutte le correnti (entranti e uscenti) è uguale a 0.

Nel caso proposto i nodi sono solo due: Va e Vb.
Il nodo Vb è indicato uguale a Vo essendo la tensione all' ingresso di un amplificatore non invertente, ed a guadagno unitario.

Per quanto riguarda il nodo Va:

$$\frac{V_a - V_i}{R_1} + \frac{V_a - V_o}{R_2} + (V_a - V_o)sC_1 = 0$$

Analogamente il nodo Vb (che come si è detto è uguale a Vo):

$$\frac{V_o - V_a}{R_2} + V_o sC_2 = 0$$

Da questa equazione è facile ricavare Va:

$$\frac{V_o - V_a + V_o sC_2R_2}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_o(1 + sC_2R_2) - V_a}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_o(1 + sC_2R_2)}{R_2} - \frac{V_a}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_o(1 + sC_2R_2)}{R_2} = \frac{V_a}{R_2}$$

I due termini dello stesso colore si annullano e il risultato finale:

$$V_a = V_o(1 + sC_2R_2) = V_o + V_o sC_2R_2$$

A questo punto basta sostituire Va nella formula della maglia relativa:

$$\frac{V_o + V_o sC_2R_2 - V_i}{R_1} + \frac{V_o + V_o sC_2R_2 - V_o}{R_2} + (V_o + V_o sC_2R_2 - V_o)sC_1 = 0$$

I termini con lo stesso colore si annullano e rimane:

$$\frac{V_o + V_o sC_2R_2 - V_i}{R_1} + \frac{V_o sC_2R_2}{R_2} + V_o s^2C_1C_2R_2 = 0$$

Quindi:

$$\frac{V_oR_2 + V_o sC_2{R_2}^2 - V_iR_2 + V_o sC_2R_1R_2 + V_o s^2C_1C_2R_1{R_2}^2}{R_1R_2} = 0$$

Raccogliendo Vo:

$$\frac{V_o\left(R_2 + sC_2{R_2}^2 + sC_2R_1R_2 + s^2C_1C_2R_1{R_2}^2\right) - V_iR_2}{R_1R_2} = 0$$

Raccogliendo R_2:

$$\frac{V_o[R_2(1 + sC_2R_2 + sC_2R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2)] - V_iR_2}{R_1R_2} = 0$$

$$\frac{V_o[R_2(1 + sC_2R_2 + sC_2R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2)]}{R_1R_2} - \frac{V_iR_2}{R_1R_2} = 0$$

$$\frac{V_o[R_2(1 + sC_2R_2 + sC_2R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2)]}{R_1R_2} = \frac{V_iR_2}{R_1R_2}$$

Anche qui i termini con lo stesso colore si annullano e rimane:

$$V_o[R_2(1 + sC_2R_2 + sC_2R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2)] = V_iR_2$$

Per cui Vo/Vi:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2}{R_2(1 + sC_2R_2 + sC_2R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2)}$$

Annullando i termini con lo stesso colore, raccogliendo “sC_2”, e riarrangiando il tutto:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2 + sC_2(R_1 + R_2) + 1}$$

La classica funzione del passa-basso sallen-Key a guadagno unitario.
Ora per ricondursi alla formula tradizionale bisogna liberare s^2 cioè dividere tutto per $C_1C_2R_1R_2$:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}{\frac{s^2C_1C_2R_1R_2}{C_1C_2R_1R_2} + \frac{sC_2(R_1 + R_2)}{C_1C_2R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

Di nuovo i termini con lo stesso colore si annullano, e rimane:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2 + s\frac{(R_1 + R_2)}{C_1R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

Dove:

$$\Omega_n{}^2 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}$$

$$2\xi\Omega_n = \frac{R_1 + R_2}{C_1R_1R_2}$$

A questo punto basta sostituire s con jω, e rifarsi ai calcoli del capitolo 4.